Université Abdelmalek Essaâdi — Année: 2010 - 2011

ENSA de Tétouan — Gr1 : S1

Module d'Algèbre I

Série N° : 5

Exercice 1.

a) Dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, montrer que $1, \sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont indépendants.

b) Montrer que les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \rightarrow sin(x), x \rightarrow sin(x^2)$ et $x \rightarrow sin(x^3)$ forment une famille libre.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (-1, 2, 1)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (3, -4, -5)$.

1) Montrer que $\{u, v\}$ est libre et que $\{u, v, w\}$ est liée.

2) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x, 1, 2) \in Vect\{u, v\}$.

3) Soit $u' = (1, 0, -3)$, $v' = (-2, 5, 1)$. Montrer que $Vect\{u, v\} = Vect\{u', v'\}$.

4) Que peut on dire de la famille $\{u', v', w\}$.

Exercice 3. On considère le système (S) $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{array}\right.$

Montrer que l'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.

Exercice 4. Soit $E = R_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 5. On définit les ensembles $\mathbb{F} = \{P \in E | P(0) = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{P \in E, (X^2+1)|P\}$.

1) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Déterminer une base de $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E tel que: $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 0_E$. Trouver $Ker(f)$ et $Im(f)$ en précisant une base de chacun de ces sous-espaces

Exercice 6. Soient E et F des K -espaces vectoriels de dimension finie, et u une application linéaire de E dans F. Montrer que:

a) Pour tout sous-espace vectoriel E' de E, $dim(u(E')) = dim(E') - dim(E' \cap Ker(u))$.

b) Pour tout sous-espace vectoriel F' de F, $dim(u^{-1}(F')) = dim(F' \cap Im(u)) + dim(Ker(u))$.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n$.

a) Montrer que l'application $\psi : E \to \mathbb{R}^3$ telle que $\psi((U_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (U_0, U_1, U_2)$ est un isomorphisme.

b) Chercher les valeurs de $r \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E. En déduire une expression simple du terme général U_n de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Exercice 8. Soit $E = R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Pour $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $\{1, X-a, (X-a)^2, ..., (X-a)^n\}$ est une base de E.

2) Donner les coordonnées de X^p ($p \leq n$) dans cette base.

3) Exprimer les coordonnées dans cette base d'un polynôme P de E.

4) On définit $E_a = \{P \in E, (X-a)|P\}$. Montrer que si $a \neq b$, alors $E = E_a + E_b$, la somme est-elle directe?

Exercice 9. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E.

a) Vérifier qu'on a toujours $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$. Montrer que $Ker(u^2) = Ker(u)$ si et seulement si $Ker(u) \cap \ Im(u) = \{0\}$. Constater que cette condition est satisfaite, en particulier, lorsque u est injectif.

b) Vérifier qu'on a toujours $Im(u^2) \subseteq Im(u)$. Montrer que $Im(u^2) = Im(u)$ si et seulement si $Ker(u) + Im(u) = E$. Constater que cette condition est satisfaite, en particulier, lorsque u est surjectif.

c) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $Ker(u) \oplus Im(u) = E$;

(ii) $Ker(u) = Ker(u^2)$;

(iii) $Im(u^2) = Im(u)$.

Trouver des exemples, en dimension finie, d'endomorphismes dont le noyau et l'image ne sont pas supplémentaires.

d) On suppose que $E = K[X]$. Donner un exemple d'endomorphisme injectif u tel que $Im(u^2) \neq Im(u)$, et un exemple d'endomorphisme surjectif v tel que $Ker(v) \neq Ker(v^2)$.

Série n° 5

Ex I : $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-esp vect.

$S = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est libre ?

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ tels que :

$\alpha \cdot 1 + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Downarrow$

$\alpha \cdot 1 + \beta\sqrt{2} = -\gamma\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$\alpha^2 + \cancel{\beta\sqrt{2}}\, 2\alpha\beta\sqrt{2} + 2\beta^2 = 3\gamma^2$

$\Downarrow$

(*) $2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2 - 2\beta^2 - \alpha^2$

- Si $\alpha\beta \neq 0$, alors :

$\sqrt{2} = \dfrac{3\gamma^2 - 2\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$ impo

- Donc $\alpha\beta = 0$

- Si $\alpha = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 3\gamma^2 - 2\beta^2 = 0 \Rightarrow 3$

  - Si $\beta \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\gamma^2}{\beta^2} = \dfrac{2}{3}$

$\Longrightarrow \dfrac{\gamma}{\beta} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \notin \mathbb{Q}$ imp

Donc $\beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ (D'où $\alpha =$

- De même si $\beta = 0$, $\overset{(*)}{\Longrightarrow} 3\gamma^2 - \alpha^2 = 0$

$\Longrightarrow 3\gamma^2 = \alpha^2$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}$

(impossible)

D'où $\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Enfin, on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Longrightarrow S = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est famille libre

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ libre

$\vdots$

$\{1, \sqrt{p},\ p \in \mathcal{P}\}$ est libre

($\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$)

$\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-esp vect de dim ~~in~~ fi

$\forall z \in \mathbb{C}$ $z = a + ib$ $S = \{1,$

est une base

comme $\mathbb{R}$ esp-ve

$\|$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$1_{\mathbb{C}} = (1,0)_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ $i_{\mathbb{C}} = (0,1)$

b/ $S=\{f_1, f_2, f_3\}$ $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x^i)$

Soit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, tels que:

$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}: (\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3)(x) = 0(x)$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \alpha f_1(x)+\beta f_2(x)+\gamma f_3(x) = 0_{\mathbb{R}}$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}: \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)+\gamma f_3(x) = 0_{\mathbb{R}}$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}: \alpha\sin(x)+\beta\sin(x^2)+\gamma\sin(x^3)=0$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: \alpha\cos x + 2\beta x\cos(x^2)+3\gamma x^2\cos(x^3)=0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=0}$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*\ \ 2\beta\cos(x^2)+3\gamma x\cos(x^3)=0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 2\beta+3\gamma=0 \\ 2\beta-3\gamma=0 \end{matrix}}$ $x=\pm 1$

$\Downarrow$

$\beta=\gamma=0$

Donc $S=\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

Exo 2: Soit $E=\mathbb{R}^3$

$B=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

base canonique de E.

$u=(-1,2,1) = -1e_1+2e_2+1e_3$

$v=(0,1,-1)=0e_1+1e_2-1e_3$

1/ Mq $\{u,v\}$ est libre:

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que:

$\alpha u+\beta v = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\iff \alpha(-1,2,1)+\beta(0,1,-1)=(0,0,0)$

$\iff (-\alpha,2\alpha,\alpha)+(0,\beta,-\beta)=(0,0,0)$

$\iff (-\alpha,\ 2\alpha+\beta,\ \alpha-\beta) = (0,0,0)$

$\iff \begin{cases}-\alpha=0\\ 2\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \{u,v\}$ est libre.

$\Rightarrow$ Mq $\{u,v,w\}$ est liée où $w=(3,-4,-5)$. De m, soit $\lambda,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, tels que

$\lambda u+\gamma v+\delta w = 0_E$

$\iff \lambda(-1,2,1)+\gamma(0,1,-1)+\delta(3,-4,-5)=(0,0,0)$

$\iff \begin{cases}-\lambda+3\delta=0\\ 2\lambda+\gamma-4\delta=0\\ \lambda-\gamma-5\delta=0\\ 0=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=3\delta\\ \gamma=-2\delta\end{cases}$

En particulier, si $\delta=1$, on a $\lambda=3$ et $\gamma=-2$

D'où $3u-2v+w=0$

$\Rightarrow w=-3u+2v$

$\Rightarrow \{u,v,w\}$ est liée.

Question: Compléter $\{u,v\}$ à une base de E.

Soit $S=\{u,v,e_1\}$, on vérifie que S est libre et $\mathrm{Card}(S)=\dim E = 3$

$\Downarrow$

S est une base de E

$\alpha u + \beta v + \gamma e_1 = 0_E$

$\Rightarrow \alpha(-1,2,1) + \beta(0,1,-1) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \end{cases}$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma$

2/ $(x,1,2) \in Vect\{u,v\} = \{\alpha u + \beta v / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$(x,1,2) = \alpha u + \beta v$

$\Updownarrow$

$(x,1,2) = \alpha(-1,2,1) + \beta(0,1,-1)$

$\Updownarrow$

$(x,1,2) = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$

$\Updownarrow$

$(x,1,2) = (-\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha-\beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ 1 = 2(\beta+2) + \beta \Rightarrow 3\beta = -3 \Rightarrow \beta = -1 \\ \alpha = \beta + 2 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$

D'où : $x = -1$

3/ Soit $u' = (1,0,-3)$, $v' = (-2,5,1)$

Mq : $Vect\{u,v\} = Vect\{u',v'\}$

$\Rightarrow u = -\frac{1}{5}u' + \frac{2}{5}v' \Rightarrow u \in Vect\{$

De m̂, soit $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ tq :

$v = \lambda u' + \gamma v' \Rightarrow$

$\Rightarrow (0,1,-1) = \lambda(1,0,-3) + \gamma(-2$

$\Rightarrow (0,1,-1) = (\lambda - 2\gamma, 5\gamma, -3\lambda +$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\gamma = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \\ 5\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{5} \\ -3\lambda + \gamma = -1 \quad (-\frac{6}{5} + \frac{1}{5} \end{cases}$

On a aussi : $v = \frac{1}{5}u' + \frac{2}{5}v'$

$\Rightarrow v \in Vect\{u',v'\}$

D'où : $Vect\{u,v\} \subset Vect\{u'$

Vérifions : $\{u',v'\}$ est libre

Si $\alpha u' + \beta v' = 0_E$

$\Rightarrow \alpha(1,0,-3) + \beta(-2,5,1) = (0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{u',v'\}$ est libre.

Ĉ : $\dim(Vect(u,v)) = \dim(Vect(u'$

et $Vect(u,v) \subseteq Vect(u',v')$, on

$\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u', v')$

4/ Que peut dire $\{u', v', w\}$

On a : $\{u, v, w\}$ est liée.

$\Downarrow$

$\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \cancel{x}\ \mathrm{Vect}\{u, v\}$

D'autre part:

$\mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathrm{Vect}\{u', v'\}$

$\Downarrow$

$\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathrm{Vect}\{u', v', w\}$

$\Downarrow$

$\mathrm{Vect}\{u', v'\} = \mathrm{Vect}\{u, v\} \cancel{= \mathrm{Vect}}$

$= \mathrm{Vect}(u', v', w)$

$\Longrightarrow \{u', v', w\}$ est liée.

[redacted]

Soit (S) $\begin{cases} x + y - z = 0 & (1) \\ x + 2y + z = 0 & (2) \\ x + 3y + 3z = 0 & (3) \end{cases}$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y, z)$ est solution de $S\}$

(1) $\Longrightarrow z = x + y$

(2) $\Longrightarrow x + 2y + (x + y) = 0 \Longrightarrow 2x + 3y = 0$

(3) $\Longrightarrow x + 3y + 3(x + y) = 0 \Longrightarrow 4x + 6y = 0$

$\Longrightarrow 2x + 3y = 0$

$y = -\frac{2}{3} x$

D'où: $z = x - \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} x$

$F = \{(x, -\frac{2}{3} x, \frac{1}{3} x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(3, -2, 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}\{(3, -2, 1)\}$

Donc $F = \mathrm{Vect}\{(3, -2, 1)\}$

$\Longrightarrow \{(3, -2, 1)\}$ est libre.

$\Longrightarrow \{(3, -2, 1)\}$ est une base de F

$\Longrightarrow \dim F = 1$

Ex 4: $E = \mathbb{R}_5[X]$

$= \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \deg P \leq 5\}$

est un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$.

($\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^4, X^5\}$ est la base canonique de E).

$F = \{P \in E \,/\, P(0) = 0\}$

$G = \{P \in E \,/\, (X^2 + 1) \mid P\}$

Soit $P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f \in F$

$\Longleftrightarrow P(0) = f = 0$

$\Longrightarrow P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX$

$\Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\{X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$

$\Longrightarrow F$ est le s.e.v de E engendré par $\{X, X^2, X^3, X^4, X^5\} = \mathcal{B}$ qui est aussi libre

$\Longrightarrow \{X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ est une base de F

$\forall P_1, P_2 \in G, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a:

$P_1 \in G \Longrightarrow (X^2 + 1) \mid P_1 \Longrightarrow (X^2 + 1) \mid \alpha P_1$

$P_2 \in G \Longrightarrow (X^2 + 1) \mid P_2 \Longrightarrow (X^2 + 1) \mid \beta P_2$

$(X^2 + 1) \mid (\alpha P_1 + \beta P_2)$

$\Rightarrow \alpha P_1 + \beta P_2 \in G \Rightarrow G$ est un s.e.v de E.

Soit $P \in G \Rightarrow P = (X^2+1)Q$ avec $\deg Q \leq 3$

$\Rightarrow P = (X^2+1)(aX^3+bX^2+cX+d)$

$= a(X^2+1)X^3 + b(X^2+1)X^2 + c(X^2+1)X + d(X^2+1)$

$\Rightarrow P \in Vect\{(X^2+1)X^3, (X^2+1)X^2, (X^2+1)X, X^2+1\}$

Vérifions si $\{(X^2+1)X^3, (X^2+1)X^2, (X^2+1)X, (X^2+1)\}$ est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(X^2+1)X^3 + \beta(X^2+1)X^2 + \gamma(X^2+1)X + \lambda(X^2+1) = 0_E$

$\Downarrow$

$\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \lambda = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$

Donc $\{(X^2+1)X^3, (X^2+1)X^2, (X^2+1)X, X^2+1\}$ est libre et par suite c'est une base de G

Soit $P \in F \cap G$

$P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX$

$X^2+1 \mid P \Rightarrow P(i) = 0$ et $P(-i) = 0$

$P(i) = ai + b - ci - d + ei = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} b - d = 0 \\ a - c + e = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = d}$ $\boxed{c = a+e}$

$P(-i) = -ai + b + ci - d - ei = 0$

$\Rightarrow -a + c - e = 0 \Rightarrow c = a + e$

$P = aX^5 + bX^4 + (a+e)X^3 + bX^2 + eX$

$= a(X^5 + X^3) + b(X^4 + X^2) + e(X^3 + X)$

$= aX^3(X^2+1) + bX^2(X^2+1) + e\ldots$

$\Rightarrow P \in Vect\{X^3(X^2+1), X^2(X^2+1), \ldots$

$\Rightarrow \{X^3(X^2+1), X^2(X^2+1), X(X^2+\ldots$

est une famille génératrice et libre, c'est donc une base de

Remarques

$S = \{(X^2+1)X^3, (X^2+1)X^2, (X^2+1)X \ldots$

$\subset$ ~~$F \cup G$~~ $F \cap G$

$\Rightarrow Vect\{S\} \subseteq F \cap G$

Ex 5 : Soit $E = \mathbb{R}^3$

$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = \ldots$ la base canonique de E.

$f : E \longrightarrow E$

$e_1 \longrightarrow 2e_1 + e_2 - 3e_3$

$e_2 \longrightarrow e_1 - e_2 + e_3$

$e_3 \longrightarrow 0_E$

$Ker(f) = \{u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / f(u \ldots$

Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in Ker(f) \Leftrightarrow f\ldots$

$\Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = 0_E$

$\Rightarrow \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0\ldots$

$\Rightarrow \alpha(2e_1 + e_2 - 3e_3) + \beta(e_1 - e_2 + \ldots$

$= 0_E$

$\Rightarrow (2\alpha + \beta)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 + (\beta - 3\alpha\ldots$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \Rightarrow 3\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \\ \alpha-\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow \boxed{\beta=0} \\ \beta-3\alpha=0 \end{cases}$

$\ker(f) = \{(0,0,\gamma) / \gamma \in \mathbb{R}\}$
$= \{\gamma e_3 / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}\{e_3\}$

D'où $\{e_3\}$ est une base de $\ker(f)$
$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1$

et $\dim E = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$

$\Rightarrow$ Pr déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit de trouver une famille à 2 élément qui est libre ou génératrice. Par exemple : $\{f(e_1), f(e_2)\}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = 0_E$
$\Rightarrow \alpha(2e_1+e_2-3e_3) + \beta(e_1-e_2+e_3) = 0_E$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=0 \\ -3\alpha+\beta=0 \end{cases} (+)$

$\Rightarrow 3\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=0$

Donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Alors $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2)\}$

Ex 6 : Soit $u : E \longrightarrow F$

a/ Pour tout s.e.v E' de E on a :
$\dim(u(E')) = \dim(E') - \dim(E' \cap \ker(u))$

Soit : $v = u_{/E'} : E' \longrightarrow F$, alors
$\dim(E') = \dim(\mathrm{Im}(v)) + \dim(\ker$
$= \dim(v(E')) + \dim(E' \cap \ker($
$= \dim(u(E')) + \dim(E' \cap \ker(u))$
$\Rightarrow \dim u(E') = \dim(E') - \dim(E' \cap$

$\ker(v) = \{x \in E' / v(x) = 0_F\}$
$= \{x \in E' / u(x) = 0_F\}$
$= E' \cap \ker(u)$

b/ Pour tout s.e F' de F, on a :
$\dim u^{-1}(F') = \dim(F' \cap \mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$

Soit $E' = u^{-1}(F')$, alors :
$\underbrace{\dim(u(E'))}_{\dim(\mathrm{Im}(u) \cap F')} = \underbrace{\dim(E')}_{\dim(u^{-1}(F'))} - \dim(\underbrace{E' \cap \ker}_{\ker(u)}$

$u(E') = u(u^{-1}(F'))$
$= \{u(x) / x \in u^{-1}(F')\} = X$

Soit $x \in E$ tq :
$u(x) \in X \Rightarrow u(x) \in \begin{cases} \mathrm{Im}(u) \\ F' \end{cases}$ $\mathrm{Im}(u) \overset{?}{=} \mathrm{Im}(u)$
$\Rightarrow u(x) \in F' \cap \mathrm{Im}(u)$

De même si $y \in Y \Rightarrow \begin{cases} F' \\ \exists y = u(x), x \in E \end{cases}$
$\Rightarrow u(x) \in F' \Rightarrow x \in u^{-1}(F')$
$\Rightarrow u(x) \in X \Rightarrow y \in X$

D'autre par :
$E' \cap \ker(u) = u^{-1}(F') \cap \ker(u)$

ETUSUP .com

ETUSUP .com

$\overset{?}{=} \mathrm{Ker}(u)$

. Si $x \in u^{-1}(F') \cap \mathrm{Ker}(u)$

$\Rightarrow u(x) = 0_F \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u)$

. Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$

$\Rightarrow u(x) = 0_F \in F'$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x \in u^{-1}(F')$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u) \cap u^{-1}(F')$

Ex 4 Soit :

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

a/ Soit $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$

$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$\psi(\alpha(u_n)_n + \beta(V_n)_n) = \psi((\alpha u_n + \beta V_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$= (\alpha u_0 + \beta V_0, \alpha u_1 + \beta V_1, \alpha u_2 + \beta V_2)$

$= (\alpha u_0, \alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta V_0, \beta V_1, \beta V_2)$

$= \alpha(u_0, u_1, u_2) + \beta(V_0, V_1, V_2)$

$= \alpha\psi((u_n)_n) + \beta\psi((V_n)_n)$

Donc ψ est une application linéaire

Soit $(u_n)_n \in \mathrm{Ker}(\psi)$

$\Rightarrow \psi((u_n)_n) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow (u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = 0$

Par récurrence, on déduit que $u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. D'où $(u_n)_n$ est nulle

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\psi) = \{0_E\} \Rightarrow \psi$ est injective

. Par construction si $(a, b, c) \in$ ...

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 =$ ...

$u_2 = c$

$\forall n \geq 0 : u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} -$ ...

Donc ψ est une application linéaire, injective et surjective ce qui signifie que ψ est un isomorphisme.

b/ Déterminer $r \in \mathbb{R}$ tel que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

On a : $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$\Updownarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} : r^{n+3} = 2r^{n+2} + r^{n+1} - 2r^n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : r^n(r^3 - 2r^2 - r + 2) =$ ...

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow (\text{La suite nulle}) \\ r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{r = -1, 0, 1, 2\}$

~~La suite nulle~~

Les suites $(-1)^n$, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans E.

On vérifie que $\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, (-1)^n_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est libre. En effet,

$\alpha(1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(-1)^n_{n\in\mathbb{N}} + \gamma(2^n)_n$ ...

$\Rightarrow (\alpha)_{n\in\mathbb{N}} + (\beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} + (\gamma 2^n)_n =$ ...

$\Rightarrow (\alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n)_n = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n = 0$

(1)

En particulier,

$n=0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$

$n=1 \Rightarrow \alpha-\beta+2\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$n=2 \Rightarrow \alpha+\beta+4\gamma=0$

$\Rightarrow S=\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, (-1)^n_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

est libre et comme :

$\dim(E)=\dim(\mathbb{R}^3)=3=\operatorname{Card}(S)$

$\Rightarrow S$ est une base de E. On en déduit que S est une base de E et par suite :

$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que :

$u_n=\alpha+\beta(-1)^n+\gamma 2^n, \forall n\in\mathbb{N}$

Ex 8 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$

$=\{P\in\mathbb{R}[X] \,/\, \deg(P)\leq n\}$

($B=\{1, X, \_\_, X^n\}$ est la base canonique de E).

1/ Soit $S=\{1, (X-a), \_, (X-a)^n\}$ est une base de E,

$\operatorname{Card}(S)=\dim E$, il suffit de montrer que S est libre ou génératrice.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$

Soit $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$

Alors, la formule de Taylor de P au ~~pt~~ point $a\in\mathbb{R}$:

$P=\frac{P(a)}{0!}\cdot 1+\frac{P'(a)}{1!}(X-a)+\dots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$

$\Rightarrow P\in \operatorname{Vect}\{1,(X-a),\dots,(X-a)^n\}$

$\Rightarrow S$ est une famille génératrice de E et par suite, c'est une base de E.

$S=\{1, X-a, \_\_, (X-a)^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2/ Soit $p\leq n$, on a : $X^p=(X-a+a)^p \underset{(*)}{\Longrightarrow}$

$=\sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k}(X-a)^k$

Alors : $(a^p, pa^{p-1}, \dots, C_p^k a^{p-k}, \dots, pa, 1, 0, \dots, 0)$

représentent les coordonnées de X^p dans la base S.

($(p-1)$-ième position ; p-ième position)

3/ ~~Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, alors :~~

~~$P=\sum_{p=0}$~~

$\underset{(*)}{\Longrightarrow} a_pX^p=\sum_{k=0}^{p} a_pC_p^k a^{p-k}(X-a)^k$

$=C_p^0 a_p a^p (X-a)^0+C_p^1 a_p a^{p-1}(X-a)^1$

$+\dots+a_pC_p^k a^{p-k}(X-a)^k+\dots+a_pC_p^p(X-a)^p$

3/ Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors,

$P=\sum_{p=0}^{n} a_pX^p=\sum_{p=0}^{n} a_p\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k}(X-a)^k\right)$

$=\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{p} a_pC_p^k a^{p-k}(X-a)^k\right)$

$\Rightarrow P=\sum_{p=0}^{n} a_pX^p$

$=\left(\sum_{p=0}^{n} C_p^0 a_p a^p\right)(X-a)^0$

$+\left(\sum_{p=0}^{n} C_p^1 a_p a^{p-1}\right)(X-a)^1$

$+\dots+\left(\sum_{p=0}^{n} a_p C_p^k a^{p-k}\right)(X-a)^k$

$$\dots + \sum_{p=0}^{n} a_p (X-a)^p + \dots$$

$\underline{p=0}$: $a_0 X^0 = a_0 C_0^0 a^0 (X-a)^0$

$\underline{p=1}$: $a_1 X^1 = a_1 C_1^0 a^{1-0} (X-a)^0 + a_1 C_1^1 a^{1-1} (X-a)^1$

$\underline{p=2}$:

$a_2 X^2 = a_2 C_2^0 a^{2-0} (X-a)^0 + a_2 C_2^1 a^{2-1} (X-a)^1 + a_2 C_2^2 a^{2-2} (X-a)^2$

$\vdots$

$\underline{p=n-1}$:

$a_{n-1} X^{n-1} = a_{n-1} C_{n-1}^0 a^{n-1-0} (X-a)^0 + a_{n-1} C_{n-1}^1 a^{n-1-1} (X-a)^1 + \dots + a_{n-1} C_{n-1}^{n-1} a^{n-1-(n-1)} (X-a)^{n-1}$

$\underline{p=n}$:

$a_n X^n = a_n C_n^0 a^{n-0} (X-a)^0 + a_n C_n^1 a^{n-1} (X-a) + \dots$

$$P = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p C_p^0 a^p\right)(X-a)^0 + \left(\sum_{p=1}^{n} a_p C_p^1 a^{p-1}\right)(X-a)^1 + \left(\sum_{p=2}^{n} a_p C_p^2 a^{p-2}\right)(X-a)^2 + \dots + \sum_{p=k}^{n} a_p C_p^k a^{p-k} (X-a)^k + \dots + a_n (X-a)^n$$

la k-ième composante de P est

$$\left(\sum_{p=k}^{n} a_p C_p^k a^{p-k}\right)$$

4/ $E_a = \{P \in E : (X-a) \mid P\}$

Montrer que si $a \neq b$ on a : $E = E_a \oplus E_b$

$\forall P \in E$: $P = P_a + P_b$ où $P_a \in E_a$ et $P_b \in E_b$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha(X-a) + \beta(X-b) = 1$

$(\alpha+\beta) X - (a\alpha + b\beta) = 1$

$\boxed{\alpha = -\beta}$ $\quad -(a\alpha - b\alpha) = 1$

$(b-a)\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{b-a}}$

et $\boxed{\beta = \frac{1}{a-b}}$

$\Rightarrow \forall P \in E$:

$P = P.1 = P(\alpha(X-a) + \beta(X-b))$

$= \underbrace{(X-a)(\alpha P)}_{\in E_a} + \underbrace{(X-b)(\beta P)}_{\in E_b}$

$\Rightarrow E = E_a + E_b$

$E \overset{??}{=} E_a \oplus E_b$

$0 \neq (X-a)(X-b) \in E_a \cap E_b$

$\Rightarrow$ La somme $E = E_a + E_b$ n'est ~~pas directe~~ pas en général une somme directe.

$\underline{\text{Si } n=1}$:

$E = \mathbb{R}_1[X] = \{P \mid \deg P \leq 1\}$

$E_a = \{\lambda(X-a) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$E_b = \{\lambda(X-b) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$P \in E_a \cap E_b \Rightarrow (X-a) \mid P$ et $(X-b) \mid P$

$\Rightarrow (X-a)(X-b) \mid P \Rightarrow P = 0$

$\Rightarrow E = E_a \oplus E_b$

9: Soit un K.e.v E et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme

a/ Montrer que i/ $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$ $(u^2 = u \circ u)$

Soit $x \in Ker(u) \Rightarrow$ K

$\Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$

$\Rightarrow u^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in Ker(u^2)$

Donc $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$

ii/ $Ker(u) = Ker(u^2) \Leftrightarrow Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$

$\Rightarrow$) Soit $z \in Ker(u) \cap Im(u)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(z) = 0_E \\ \exists x \in E : u(x) = z \end{cases}$

$\Rightarrow u^2(x) = u(z) = 0_E$

$\Rightarrow x \in Ker(u^2) = Ker(u)$

$\Rightarrow u(x) = 0_E$

$\Downarrow$

$z = 0 \Rightarrow Ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$

$\Leftarrow$) D'après (i), on a : $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$

il reste à mq Si :

$Ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\} \Rightarrow Ker(u^2) \subseteq Ker(u)$

En effet, soit $z \in Ker(u^2)$

$\Rightarrow u^2(z) = 0_E$

$\Rightarrow u(u(z)) = 0_E$

$\Rightarrow u(z) \in Ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$

$\Downarrow$

$u(z) = 0_E$

$\Downarrow$

$z \in Ker(u)$

Donc $Ker(u^2) \subseteq Ker(u)$ et par suite : $Ker(u) = Ker(u^2)$.

b/ Mq : ⊕ $Im(u^2) \subseteq Im(u)$

Soit $z \in Im(u^2)$

$\Rightarrow \exists x \in E : z = u^2(x) = u(u(x))$

$\Rightarrow z = u(y)$ où $y = u(x)$

$\Rightarrow z \in Im(u)$

⊕ $Im(u^2) = Im(u) \Leftrightarrow Ker(u) + Im(u) = E$

$\Rightarrow$) Supposons que : $Im(u^2) = Im(u)$

$\forall x \in E$, $u(x) \in Im(u) = Im(u^2)$

$\Rightarrow \exists x_1 \in E : u(x) = u^2(x_1)$

$\Rightarrow u(x) - u(u(x_1)) = 0$

$\Rightarrow u(x - u(x_1)) = 0$

$\Rightarrow u(x - u(x_1)) = 0$

$\Rightarrow x - u(x_1) \in Ker(u)$

D'où $x = \underbrace{x - u(x_1)}_{\in Ker(u)} + \underbrace{u(x_1)}_{\in Im(u)}$

Ker $\Rightarrow x \in Ker(u) + Im(u)$

$\Rightarrow E = Ker(u) + Im(u)$

$Ker(u) = Ker(u^2)$.

$\Leftrightarrow Im(u) \cap Im(u) = \{0\}$

Si u est injective $\Rightarrow Ker(u) = \{0\}$

$\Rightarrow Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$

$\Rightarrow Ker(u) = Ker(u^2)$

Si u est surjective $\Rightarrow Im(u) = E$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$Im(u) = Im(u^2) \Leftarrow Im(u) + Ker(u) = E$

c/ Si $\dim(E) < +\infty$, alors :

(i) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$

(ii) $Ker(u) = Ker(u^2)$

(iii) $Im(u) = Im(u^2)$

$Ker(u) = Ker(u^2) \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$ (*)

$E \supseteq Ker(u) + Im(u)$

$\dim(Ker(u) + Im(u)) =$

$= \dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) - \dim(\underbrace{Im(u) \cap Ker(u)}_{\{0\}})$

$\Rightarrow \dim(Ker(u) + Im(u)) = \dim(Ker(u)) + \dim(Im(u))$

$= \dim(E)$

$\Rightarrow \boxed{E = Ker(u) + Im(u)}$ (**)

Alors (*) + (**) $\Rightarrow E = Ker(u) + Im(u)$

D'où : ii) $\Rightarrow$ i)

On a évidemment :

i) $\Rightarrow E = Ker(u) + Im(u)$

$\overset{(b)}{\Longrightarrow} Im(u) = Im(u^2)$

$\Rightarrow$ (iii)

De même (i) $\Rightarrow Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$

$\overset{(a)}{\Longrightarrow} Ker(u) = Ker(u^2) \Rightarrow$ (ii)

⊕ Enfin si $Im(u) = Im(u^2)$

$\overset{(b)}{\Longleftrightarrow} E = Ker(u) + Im(u)$.

$\Rightarrow \dim(E) = \dim(Ker(u) + Im(u))$

$= \dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E)$

$- \dim(Ker(u) \cap Im(u))$

$\Rightarrow \dim(Ker(u) \cap Im(u)) = 0$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$

$\Rightarrow$ (i)

(*)

(**)

<u>Exemples</u> : $\dim(E) < +\infty$

$u : E \to E$ linéaire

tel que : $E \neq Ker(u) \oplus Im(u)$

$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longrightarrow (x-y, x-y, z)$

On vérifie facilement que u est linéaire.

Soit $(x, y, z) \in Ker(u) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow u(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$\Longleftrightarrow (x-y, x-y, z) = (0, 0, 0)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow Ker(u) = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1, 1, 0) / x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \{(1, 0, 0)\}$ est une base de $Ker($

$\Downarrow$

$\dim(Ker(u)) = 1 \Rightarrow \dim(Im($

Soit $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 =$

la base canonique de $\mathbb{R}^3$

et $B' = \{u(e_1) = (1, 1, 0), u(e_2) = (-1,$

$u(e_3) = (0, 0, 1)\} \subseteq Im(u)$

Alors $e_1' = (1, 1, 0) \in Im(u)$

et $e_3 \in Im(u)$ et $\{e_1', e_3\}$

libre

$\Downarrow$

$\{e_1', e_3\}$ est une base de $Im($

et puisque $\dim(Im(u)) = 2$

Alors :

$\boxed{Im(u) = \{\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) /}$

<u>Remarque</u> : $Im(u) + Ker(u) = Im($

(Car $Ker(u) \subseteq Im(u)$)

$\Rightarrow \begin{cases} E \neq Im(u) + Ker(u) = Im(u \\ \{0\} \neq Im(u) \cap Ker(u) = Ker(\end{cases}$

Conclusion: $E \neq Ker(u) \oplus Im(u)$

d) Supposons que $E = K[X]$

La famille $L = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$

Si $\alpha_{i_1} X^{i_1} + \alpha_{i_2} X^{i_2} + \dots + \alpha_{i_m} X^{i_m} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} X^{i_2 - i_1} + \dots + \alpha_{i_m} X^{i_m - i_1} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_m} = 0$

$\Rightarrow$ L est libre et comme card$(L) = +\infty$

$\Rightarrow \dim(E) = +\infty$

Soit $u : K[X] \longrightarrow K[X]$

$P \longrightarrow u(P) = X.P$

Soit $Q \in Im(u) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \exists P \in K[X], Q = u(P) = XP$

$\Rightarrow \deg Q = 1 + \deg(P)$

$\Rightarrow \deg(Q) > \deg(P)$

Si $Q = k \in K^* \Rightarrow \deg(Q) = 0$

Supposons qu'il existe $P \in K[X]$ tq $Q = XP \Rightarrow 0 = 1 + \deg P$ (impossible)

$\Rightarrow Q = k \notin Im(u)$

$\left(Im(u) \not\subset Im(u^2) \right.$

~~Soit $v : K[X] \longrightarrow K[X]$~~

~~$P \longrightarrow v(P) = P'$~~

~~$Ker(v) \neq Ker(v^2) \Leftrightarrow Ker(v) \cap Im(v) \neq \{0\}$~~

~~$P \in Ker(v)$~~

c) Soit $u : K[X] \to K[X]$

$P \longrightarrow XP$

$Im(u) \neq Im(u^2) \overset{b)}{\Leftrightarrow} Ker(u) + Im(u) \neq E$

Soit $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = 0$

$\Leftrightarrow XP = 0$

$P = 0$!

$\Rightarrow Ker(u) = \{0\}$

D'autre part: $\forall k \in K^*, k \notin Im(u)$

$\Rightarrow Im(u) \not\subset E$

D'où $Ker(u) + Im(u) = Im(u) \neq E$

$(b) \Downarrow$

$Im(u) \neq Im(u^2)$

Soit $v : K[X] \longrightarrow K[X]$

$P \longrightarrow v(P) = P'$

$Ker(v) \neq Ker(v^2) \Leftrightarrow Ker(v) \cap Im(v) \neq \{0\}$

$P \in Ker(v) \Leftrightarrow v(P) = 0$

Si $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$

$\Rightarrow n a_n X^{n-1} + \dots + 2a_2 X + a_1 = 0$

$\Rightarrow a_n = \dots = a_1 = 0$

$\Rightarrow P = a_0 \in K$

$\Rightarrow Ker(v) = K$

$Im(v) = ??$

$\forall Q = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$

$\Rightarrow Q = v(P)$ où

$P = \frac{1}{n+1} a_n X^{n+1} + \dots + a_0 X + c$

$\Rightarrow v$ est surjective

$\Rightarrow Im(v) = K[X]$

$\Rightarrow Ker(v) \subseteq Im(v)$

D'où $Im(v) \cap Ker(v) = Ker(v) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \ker(\cdot) \neq \ker(\cdot)$

Ex : Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
$P \longrightarrow P - XP'$

a/ Mq φ est un endomorphisme.

b/ Déterminer $\ker(\varphi)$, en déduire $\mathrm{Im}(\varphi)$?

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$

$\varphi(P+Q) = P+Q - X(P+Q)'$
$= P+Q - X(P'+Q')$
$= P - XP' + Q - XQ'$
$= \varphi(P) + \varphi(Q)$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in K[X]$

On a : $\varphi(\lambda P) = \lambda P - X(\lambda P)'$
$= \lambda P - \lambda X P'$
$= \lambda(P - XP')$
$= \lambda . \varphi(P)$

Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$

$P' = 3aX^2 + 2bX + c$

$XP' = 3aX^3 + 2bX^2 + cX$

$P = XP' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + d = 3aX^3 + 2bX^2 + cX$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = a \\ b = 2b \\ d = 0 \\ c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow P = cX \Leftrightarrow \ker\varphi$ est engendré par $\{X\}$

Soit $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ on a :

$\varphi(B) = \{1, 0, -X^2, -2X^3\}$

$\varphi(1) = 1 - X(1)' = 1$

$\varphi(X) = X - X(X)' = 0$

$\varphi(X^2) = X^2 - X(X^2)' = -X^2$

$\varphi(X^3) = X^3 - 3X^3 = -2X^3$

Vérifions : $\{1, -X^2, -2X^3\}$ est libre ?

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$\alpha . 1 + \beta(-X^2) + \gamma(-2X^3) = 0$

$\Rightarrow \alpha - \beta X^2 - 2\gamma X^3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

Donc $\{1, -X^2, -2X^3\}$ est une fam libre de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et comme $\dim(\mathrm{Im}(\varphi$

On déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{1, -X^2,$

c/ Questions : $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$

Soit :

$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap \ker(\varphi)$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} P \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + d = \alpha - \beta X^2 - 2\gamma X^3 \\ P \in \ker(\varphi) \Rightarrow aX^3 + bX^2 + d = cX \Leftrightarrow a = b = d = 0 \end{cases}$

(*)

$\ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\} \Leftarrow P = 0$

$\Downarrow$

$\dim(\mathrm{Im}(\varphi) + \ker(\varphi))$

$\|$

$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim E$

D'où $E = \ker(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi)$ (**)

(*) + (**) $\Leftrightarrow E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$

$\Rightarrow \ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplém

Ex: Soit: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$

un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

1- f est-elle injective

2- Trouver $Ker(f)$, $Im(f)$ et montrer que $\mathbb{R} = Ker(f) \oplus Im(f)$.

1- Soit $(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow x=0,\ y=0$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(0,0,z) / z \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{\lambda(0,0,1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ n'est pas injective} \\ \{e_3\} \text{ est une base de } Ker(f) \\ \dim(Ker(f)) = 1 \\ \dim(Im(f)) = 2 \end{cases}$

On remarque que:

$f(2e_1) = (1,0,0) \in Im(f)$

$f(2e_2) = (0,1,0) \in Im(f)$

$\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ est une base de $Im(f)$

$\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$X = \underbrace{xe_1 + ye_2}_{Im(f)} + \underbrace{ze_3}_{Ker(f)} \in Im(f) + Ker(f)$

$\Downarrow$

$(*)\ \boxed{\mathbb{R}^3 = Ker(f) + Im(f)}$

D'autre part, soit $(x,y,z) \in Ker(f) \cap Im(f)$

$\Rightarrow X = (x,y,z) = \begin{cases} \lambda e_3 \\ \alpha e_1 + \beta e_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 \Rightarrow \alpha e_1 + \beta e_2 - \lambda e_3 = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = \beta = \lambda = 0 \Rightarrow X = 0$

D'où: $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ $(**)$

Enfin, $(*) + (**)$

$\Rightarrow E = Ker(f) \oplus Im(f)$

Ex: Soit: $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P \longrightarrow (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$

où $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$; $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$

Mq f est un isomorphisme.

Ex Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tq: $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$

a/ Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(v)$

b/ Mq f est 1 isomorphisme.

Corrigé: Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, tq $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$

$\varphi: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P \longrightarrow (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a:

$\varphi(\alpha P + \beta Q) =$

$= ((\alpha P + \beta Q)(a_1), (\alpha P + \beta Q)(a_2), (\alpha P + \beta Q)(a_3))$

$= (\alpha P(a_1) + \beta Q(a_1), \alpha P(a_2) + \beta Q(a_2),$

$$, \alpha P(a_3) + \beta Q(a_3))$$
$$= (\alpha P(a_1), \alpha P(a_2), \alpha P(a_3))$$
$$+ (\beta Q(a_1), \beta Q(a_2), \beta Q(a_3))$$
$$= \alpha (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
$$+ \beta (Q(a_1), Q(a_2), Q(a_3))$$
$$= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$$

Donc φ est une application linéaire.

Puisque $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors pour montrer que φ est bijective, il suffit de mq φ est injective ou bien φ est surjective.

Ex: $f : E \longrightarrow F$ linéaire. avec $\dim E \neq \dim F$

Mq f n'est pas ~~surject~~ bijective

Par exemple mq φ est injective, ce qui signifie que :

$$\ker \varphi = \{0\}$$

Soit $P \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(P) = 0$

$\Leftrightarrow (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (0,0,0)$

Si $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1^2 + \beta a_1 + \gamma = 0 \ (1) \\ \alpha a_2^2 + \beta a_2 + \gamma = 0 \ (2) \\ \alpha a_3^2 + \beta a_3 + \gamma = 0 \ (3) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Leftrightarrow \alpha(a_1-a_2)(a_1+a_2) + \beta(a_1-a_2) = 0$

$(1)-(3) \Leftrightarrow \alpha(a_1-a_3)(a_1+a_3) + \beta(a_1-a_3) = 0$

$(2)-(3) \Leftrightarrow \alpha(a_2-a_3)(a_2+a_3) + \beta(a_2-a_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(a_1+a_2) + \beta = 0 \ (1)' \\ \alpha(a_1+a_3) + \beta = 0 \ (2)' \\ \alpha(a_2+a_3) + \beta = 0 \ (3)' \end{cases}$$

$(1)'-(2)' \Leftrightarrow \alpha(a_2-a_3) = 0 \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Donc $P = 0 \Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \varphi$ est injective et par suite φ est bijective c'est à dire φ est un isomorph[...]

Corrigé 2 : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} e_1 \longrightarrow e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2 \longrightarrow e_2 \\ e_3 \longrightarrow e_1 - e_3 \end{cases}$$

Soit $V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f(V) = f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$= f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3)$$
$$= x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2) + z f(e_3)$$
$$= x(e_1+e_2+e_3) + ye_2 + z(e_1 - e_3)$$
$$= (x+z)e_1 + (x+y)e_2 + (x-z)e_3$$
$$= (x+z, x+y, x-z)$$

b/ Puisque f est un endomorphisme alors, f est un automorphisme si et seulement si, f est injective ou bien surjective

Soit $(x,y,z) \in \ker(f)$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 \\ x+y = 0 \\ x-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\} \Rightarrow f$ est injecti[ve]

c/ Soit $L = \{e'_1, e'_2\}$ avec $e'_1 = e_1 [...]$ et $e'_2 = e_1 - e_3$, Mq L est libre [...] compléter L à une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha e'_1 + \beta e'_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha(e_1+e_2+e_3) + \beta(e_1 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(\alpha+\beta) e_1 + \alpha e_2 + (\alpha - \beta) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $L = \{e'_1, e'_2\}$ est une famille libre.

Soit $L'_1 = \{e_1, e'_1, e'_2\}$

$\alpha e_1 + \beta e'_1 + \gamma e'_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2 + e_3) + \gamma(e_1 - e_3) = 0$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma) e_1 + \beta e_2 + (\beta - \gamma) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ex : $f : E \to F$ une application linéaire et $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une famille de E.

Mq si

a/ S est libre et f est injective

$\Downarrow$

$f(S)$ est libre ds F

b/ S est génératrice et f surjective

$\Downarrow$

$f(S)$ est génératrice ds F

On a $\boxed{f(S) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}}$

a/ Si

$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_n f(a_n) = 0_F$

$\Rightarrow f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) = 0_F$

$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_K$

$\Rightarrow f(S)$ est libre.

b/ $\forall v \in F \ \exists u \in E$

$\Downarrow$

$\exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \in K$

$u = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$

$\Downarrow$

$v = \alpha_1 f(a_1) + \cdots + \alpha_n f(a_n)$

$\Downarrow$

$f(S)$ est génératrice.

Ex : $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z, t) \mapsto (-x + 3y + 4z - 4t, \ -2x - 6y - 4z, \ x + 3y - 2z + 3t)$

1/ Vérifier que f est linéaire.

2/ Calculer :

$V_1 = f(e_1)$, $V_2 = f(e_2)$, $V_3 = f(e_3)$ et $V_4 = f(e_4)$

b/ $V_1 = (-1, -2, 1)$

$V_2 = (3, -6, 3)$

$V_3 = (4, -4, -2)$

$V_4 = (-4, 0, -3)$

c/ $S' = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$

$= 0_F$

Card $(S') = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc S' n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_4 = 0$

$\Updownarrow$

$\alpha(-1,-2,1) + \beta(3,-6,3) + \gamma(-4,0,3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta - 4\gamma = 0 \ (1) \\ -2\alpha - 6\beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -3\beta \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \ (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 3\beta + 3\beta - 4\gamma = 0$

$(3) \Leftrightarrow -3\beta + 3\beta + 3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \{V_1, V_2, V_4\}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et par suite $\{V_1, V_2, V_4\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

Ex : Mq $\forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

$V = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 + \lambda V_4$

3) Déterminer une base B_0 de $Ker(f)$ et compléter B_0 à une base de $\mathbb{R}^4$

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z,t) \longmapsto (-x+3y+4z-4t,\ -2x-6y-4z,\ x+3y-2z+t)$

Soit $(x,y,z,t) \in Ker(f)$

$\Leftrightarrow f(x,y,z,t) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+4z-4t = 0 \\ -2x-6y-4z = 0 \\ x+3y-2z+t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+4z-4t = 0 \ (1) \\ x+3y+2z = 0 \ (2) \\ x+3y-2z+t = 0 \ (3) \end{cases}$$

$(2) - (3) \Leftrightarrow 4z - t = 0 \Rightarrow t =$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y-12z = 0 \ (1)' \\ x+3y+2z = 0 \ (2)' \end{cases}$$

$(1)' + (2)' \Leftrightarrow 6y - 10z = 0 \Leftrightarrow y =$

$(2)' - (1)' \Leftrightarrow 2x + 14z = 0 \Leftrightarrow x =$

$\Rightarrow Ker(f) = \{(-7z, \frac{5}{3}z,$ … $/ z \in \mathbb{R}\}$

$= \{\lambda(-21,5,3,12) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow Ker(f) = Vect\{(-21,5,3,12)\}$

$B_0 = \{\underbrace{(-21,5,3,12)}_{e'_1}\}$ est une … de $Ker f$.

Soit $B' = \{e'_1, e_1, e_2, e_3\}$ et vérif… si B' est libre.

$\alpha e'_1 + \beta e_1 + \gamma e_2 + \lambda e_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -21\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \lambda = 0 \\ 12\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$

D'où B' est libre et comme card $(B') = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, on dédui… que B' est une base de $\mathbb{R}^4$